

А. П. Антипина^{1,2}, Л. Е. Кац², А. Б. Гольдин³, А. С. Андрианов²

Абстракт

Численное интегрирование неустойчивой системы нелинейных дифференциальных уравнений при помощи классических итеративных методов, таких как Рунге-Кутты, является достаточно ресурсоемкой задачей. Перспективным подходом для решения данной задачи является использование нейронных сетей для аппроксимации нелинейных операторов решения ОДУ. В данной работе показано применение нейронной сети архитектуры DeepONet на примере задачи нахождения геодезических в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Была достигнута точность, достаточная для построения модельных изображений теней черных дыр, при более высокой скорости работы.

Архитектура и данные

Для практической реализации в работе была использована архитектура нейронных сетей DeepONet (Deep Operator Network) [3]. DeepONet состоит из двух подсетей:

- Branch Network: Кодировывает начальное условие $u(x)$ в фиксированных дискретных точках (сенсорах) x_1, x_2, \dots, x_m .
- Trunk Network: Кодировывает точки y , в которых требуется вычислить выход оператора.
- Объединение выходов подсетей:

$$G(u)(y) \approx \sum_{k=1}^p b_k t_k, \quad (3)$$

где b_k — выходы Branch Network, t_k — выходы Trunk Network, p — размерность выходных векторов.

Модель обучалась примерно 4000 траекторий, посчитанных классическим методом, описанным в работе [2], модифицированным для использования итеративного алгоритма более высокого порядка точности [?] и обеспечивающим относительную погрешность координат 10^{-16} . Для борьбы с переобучением при сравнительно небольшой обучающей выборке используются аугментации: в данном случае мы можем учесть симметрии задачи путем случайных поворотов готовых траекторий, отражений относительно плоскости $z = 0$ и т.д.

Введение

Нейронные сети стали неотъемлемым инструментом в аппроксимации непрерывных функций благодаря теореме об универсальной аппроксимации. Однако недавние исследования обобщают этот результат и показывают, что нейронные сети с одним скрытым слоем также способны с любой заданной точностью аппроксимировать любые нелинейные непрерывные операторы, действующие между бесконечномерными банаховыми пространствами [1], что является альтернативой итеративному подходу и позволяет с другой стороны подойти к решению систем дифференциальных уравнений.

Математическая постановка задачи

В рамках общей теории относительности (ОТО) движение частиц и света в гравитационном поле описывается уравнениями геодезических в искривленном пространстве-времени. В случае фотонов, которые являются безмассовыми частицами и всегда движутся со скоростью света, интервал пространства-времени равен нулю:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (2)$$

В данной работе моделируются траектории в гравитационном поле вращающейся черной дыры, описываемой метриками Керра и Шварцшильда. Здесь, как и в работе [2] задача будет решаться в декартовых координатах, так что черная дыра Керра единичной массы помещается в их начало, а для упрощения численного решения координаты будут безразмерными и по осям x, y, z значения будут откладываться в единицах GM/c^2 .

References

- [1] Tianping Chen and Hong Chen. Universal approximation to nonlinear operators by neural networks with arbitrary activation functions and its application to dynamical systems. IEEE transactions on neural networks, 6(4):911–917, 1995.
- [2] A. Andrianov, S. Chernov, I. Girin, S. Likhachev, A. Lyakhovets, and Yu. Shchekinov. Flares and their echoes can help distinguish photon rings from black holes with space-earth very long baseline interferometry. Physical Review D, 105(6), March 2022.
- [3] Lu Lu, Pengzhan Jin, Guofei Pang, Zhongqiang Zhang, and George Em Karniadakis. Learning nonlinear operators via deeponet based on the universal approximation theorem of operators. Nature machine intelligence, 3(3):218–229, 2021.

Результаты и обсуждение

Нейронная сеть, обученная на датасете со значением спина черной дыры 0.8, и классический метод были применены для расчета траекторий фотонов, испущенных из каждого пикселя экрана. Для имитации задачи, возникающей при трассировке лучей, как и в работе [2] в плоскости Oxy (перпендикулярной плоскости рисунка) было помещено кольцо:

$$r_{in} < x^2 + y^2 < r_{out} \quad (1)$$

Для каждого испущенного луча был найден аффинный параметр λ (??), в котором происходит пересечение луча с кольцом. На рис. 1 представлены изображения кольца, полученные двумя способами. На рисунке цветом показана значения λ , в которых происходит пересечение.

Метод DeepONet представляет собой мощный инструмент для моделирования сложных физических систем. Данный подход открывает новые возможности для решения задач, связанных с общей теорией относительности и астрофизикой. В дальнейшем планируется исследовать его границы применимости. Также планируется повторить сравнение скорости работы нейросетевого алгоритма по сравнению с модифицированным кодом классического интегратора, в котором основная часть траекторий будет вычисляться в сферических координатах, а переход в декартовых — лишь для малого числа траекторий, проходящих близко к оси вращения. Также планируется реализовать и исследовать архитектуру пошагового нейронного нелинейного оператора.

В перспективе планируется применять нейронный оператор для более сложных моделей, в частности — уравнений магнитогидродинамики (МГД), описывающих поведение плазмы вблизи чёрных дыры.

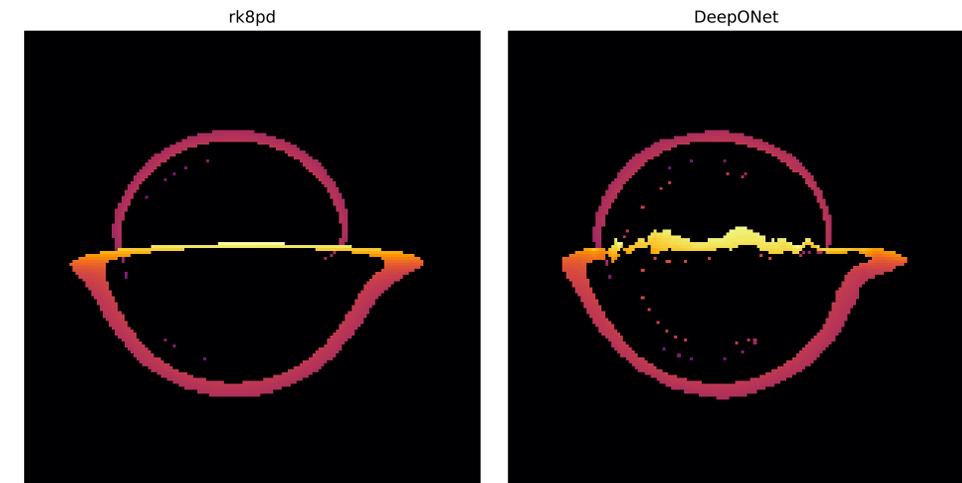


Рис. 1: На левой панели изображение тени черной дыры, полученное классическим итеративным методом, на правой панели то же изображение, полученное нейронной сетью

Contact Information

- ¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
² Астрокосмический центр Физического института им. П.Н. Лебедева РАН
³ Teza Technology, Austin TX

Email jarofhearts21@mail.ru