



Моделирование гравитационно-волнового сигнала от сливающихся черных дыр с построением аналитической модели сигнала



Ирина Клопова-Сапоровская¹ Сергей Иванович Блинников^{2, 3}

¹МФТИ

²Курчатовский институт

³Kavli IPMU

Цель работы

найти аналитическую формулу, которая максимально точно моделирует форму гравитационно-волнового сигнала и определить границы её применимости.

Задачи работы

- проанализировать уже существующие работы по моделированию гравитационных волн от сливающихся чёрных дыр;
- разбить процесс получения формы волны на этапы;
- построить аналитическую модель сигнала;
- расчитать $x(t)$, $\omega(t)$, $\phi(t)$, $r_{sep}(t)$ в Maxima в рамках аналит. модели и численно;
- посчитать эволюцию орбиты в Maxima и сравнить результат с численным;
- получить форму волны.

Основные понятия и формулы

- PN-приближение: корректировка ур-я Ньютона степенями $x = (v/c)^2$
- Параметр грав.-волновой деформации $h = \frac{\Delta L}{L}$

$$M \frac{d\Phi_{orb}}{dt} = M\omega_{orb} = x^{3/2} \quad (1)$$

$$r = M(r^{0PN}x^{-1} + r^{1PN} + r^{2PN}x + r^{3PN}x^2) \quad (2)$$

$$h_{inspiral}(t) = A(t) \cdot e^{-2i\phi(t)} \quad (3)$$

Аналитическое приближение

- Постньютоновское приближение:

$$M \frac{dx}{dt} \Big|^{6PN} = \frac{64}{5} \eta x^5 \left(1 + \sum_{k=2}^{12} a_{k/2} x^{k/2} \right) \quad (4)$$

- Аналитическое приближение:

$$M \frac{dx}{Ax^5(1 + \frac{B(x)}{Ax^5})} \approx \frac{dx}{Ax^5(1 - \frac{B(x)}{Ax^5})} \quad (5)$$

Практическая часть

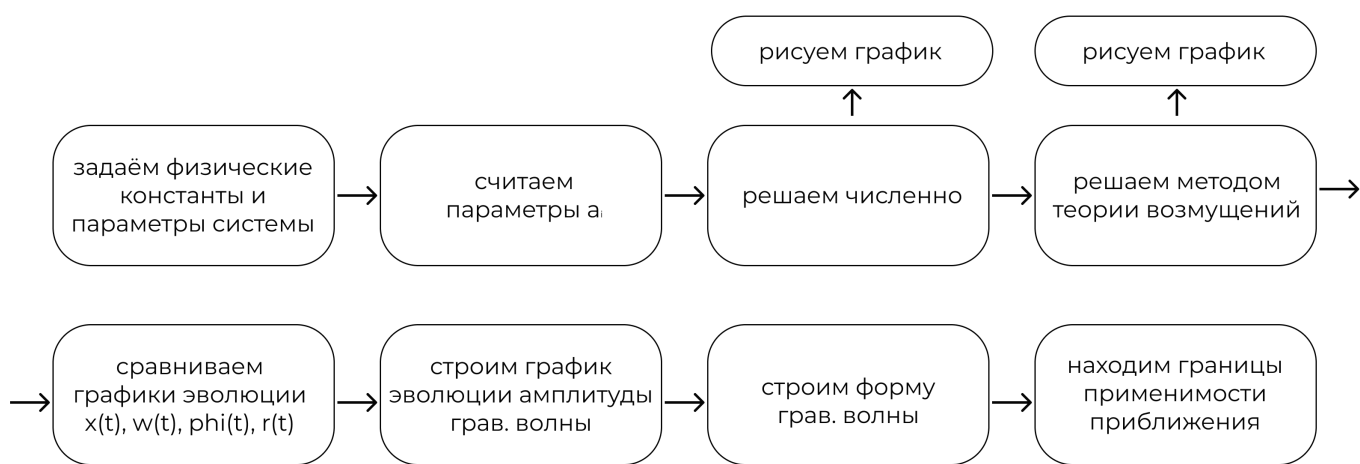


Fig.1 Алгоритм работы кода на maxima

Контакты

Ирина Клопова-Сапоровская:
kloпова-saporovskaia.ia@phystech.edu, +79650172922

Литература

[1] Buskirk, Dillon. A complete analytic gravitational wave model for undergraduates / Dillon Buskirk, Maria C Babiuc Hamilton // European Journal of Physics. — 2019. — . — Vol. 40, no. 2. — P. 025603.

Модель

Нижняя граница интегрирования, которая рассчитывается из соображений чувствительности LIGO, ограниченная сейсмической активностью Земли.

$$f_{GW}^{low} = 10Hz$$

Откуда получаем соответствующую скорость и постньютоновский параметр:

$$v_0 = (GM f_{GW}^{low} \pi)^{1/3} \quad x = (v/c)^2 = \left(\frac{GM \pi f_{GW}^{low}}{c^3} \right)^{2/3}$$

Верхняя граница интегрирования соответствует радиусу последней стабильной орбиты.

$$r_{isco} = s \cdot R_{sch} = \frac{6GM}{c^2}$$

$$v_{isco} = \sqrt{\frac{GM}{r_{isco}}} = \frac{c}{\sqrt{6}}$$

вторая поправка:

$$x_{ISCO}^{2PN} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{7}{18} \eta \right)$$

Частоту считаем по третьему закону Кеплера:

$$f_{ISCO} = \sqrt{\frac{GM}{\pi^2 r_{ISCO}^3}} = \frac{c^3}{6^{3/2} GM \pi}$$

Результаты

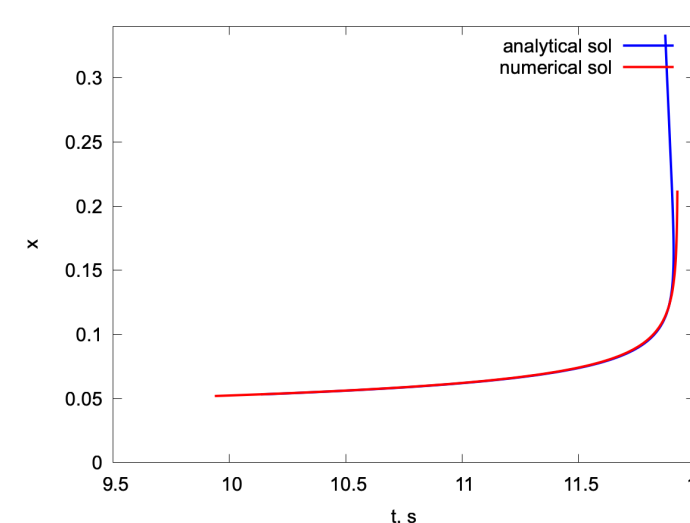


Fig.2 $x(t)$

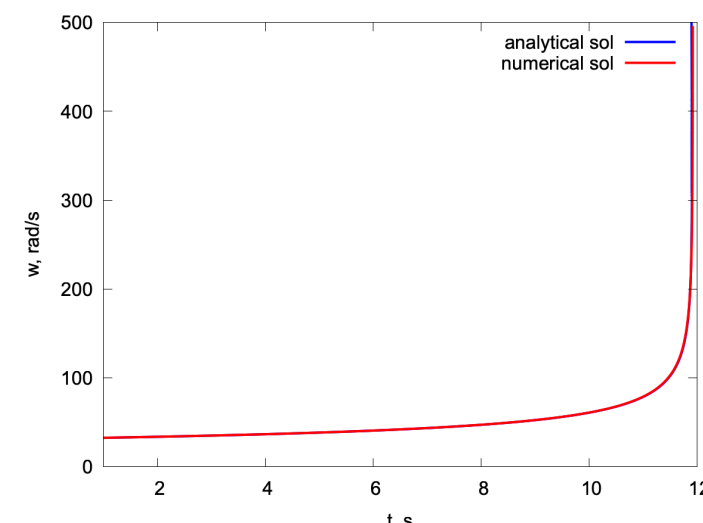


Fig.3 $\omega(t)$

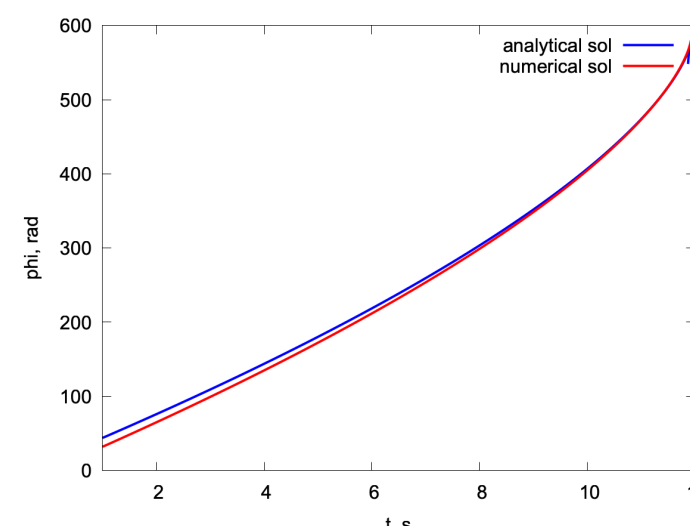


Fig.4 $\phi(t)$

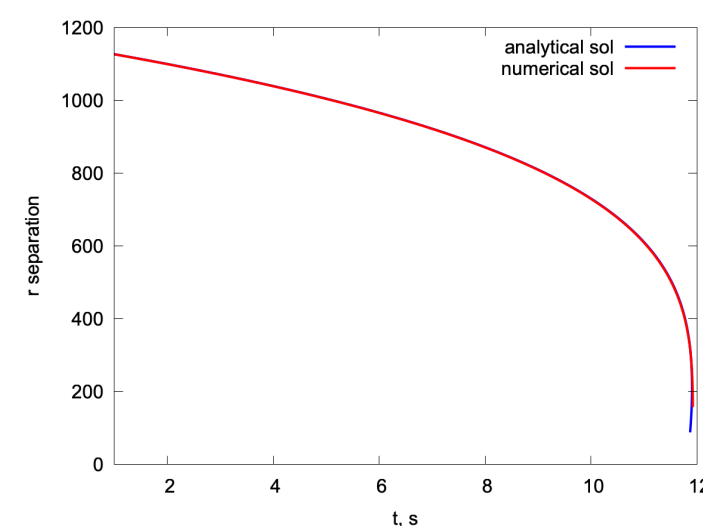


Fig.5 $r_{sep}(t)$

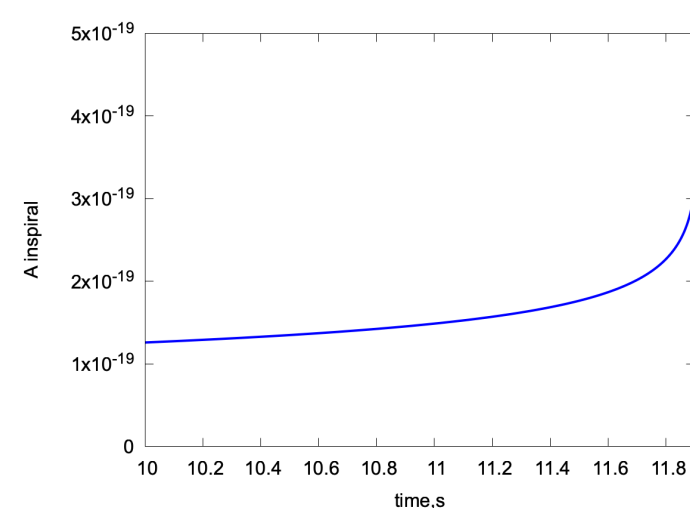


Fig.6 $A(t)$

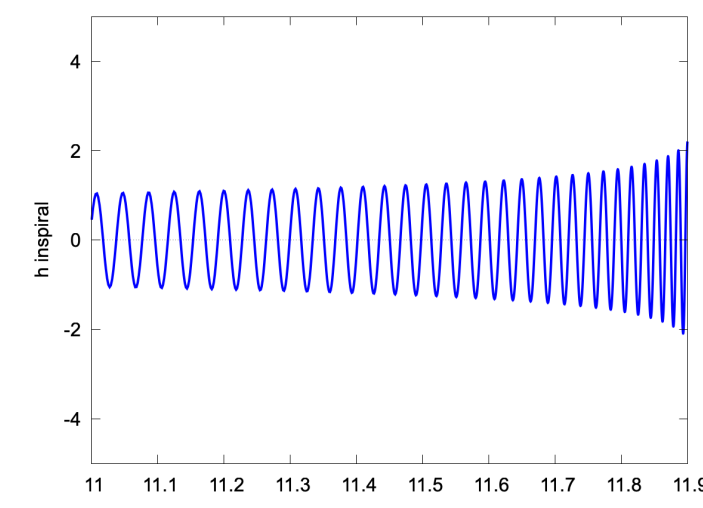


Fig.7 $h(t)$