

Электромагнитное поле заряженной петли вблизи медленно вращающейся черной дыры

С.О. Комаров, А. С. Гаркун, А. К. Горбачевич, Г. В. Верещагин

Белорусский государственный университет, кафедра теоретической физики и астрофизики
ICRANet – Минск, Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси
Институт прикладной физики НАН Беларуси

14 апреля, 2025



В соответствии с современными представлениями, рентгеновское и гамма-излучение наиболее ярких в этом диапазоне астрофизических источников обеспечивается за счет энергии, выделяемой плазмой, в процессе ее аккреции на сверхмассивную черную дыру.



Рис.:

Введение: результаты, имеющиеся в литературе

① Аналитическое решение для векторного потенциала A_j электрического заряда, **покоящегося в пространстве** впервые получено в работе E. Copson, 1928.

② Решение проверено и уточнено B. Linet, 1976.

③ В работе R. Hanni and R. Ruffini, 1973 данное решение записано в виде мультипольного разложения. Здесь показано, что с достаточной точностью решение можно описать мультипольными моментами с номерами: $l = 0, 1, 2, 3$.

① В работе Ross, 1971 вычислен спектр электромагнитного излучения частицы, радиально **падающей** в черную дыру Шварцшильда. Вычисления основаны на формуле СТО:

$$dP^i = \frac{2q^2}{3} \frac{d^2x^k}{d\tau^2} \frac{d^2x_k}{d\tau^2} u^i d\tau; \quad (1)$$

② Общерелятивистское вычисление спектра излучения такой частицы впервые представлено в работах Zerilli, 1970, R. Ruffini, 1971, R. Ruffini 1972. Здесь вычислен спектр для первых 3 мультиполей. Утверждается, что излучение, соответствующее остальным мультипольным моментам, пренебрежимо мало;

③ В работе A. Shoom, 2015 показано, что формула (1) может быть использована только лишь в тех случаях, когда масштаб, на котором меняется траектория частицы, на много меньше масштаба неоднородностей гравитационного поля;

④ В работе Folacci and Oul El Hadj, 2020 численно найден спектр излучения и его временная зависимость для частицы, двигающейся вблизи черной дыры Шварцшильда по траекториям специального вида (радиальным и круговым).

- 1 **Влияние реакции электромагнитного излучения** на движение частицы учтено в работах Arman Tursunov, Martin Kolos, Zdenek Stuhlik, and Dmitri V. Galtsov, 2018. Расчеты проведены на основе уравнения Ландау-Лифшица;
- 2 В монографии E. Poisson, 2004, 2011 представлен общерелятивистский вывод уравнений движения заряда во внешнем гравитационном поле с учетом реакции излучения. Здесь представлено аналитическое выражение для потенциала A^i (через мировую функцию Синга).

- ❶ В работе A. A. Shatskiy, I. D. Novikov and L. N. Lipatova, 2013 отмечается, что полная энергия, излучаемая электроном, падающим в черную дыру, массой $< 10^{11}$ кг, превышает энергию покоя электрона $m_e c^2$.
- ❷ Отсутствует аналитическая оценка для полной электромагнитной энергии, излучаемой частицей, падающей в черную дыру (имеется только численная оценка для отдельных мультипольных коэффициентов);
- ❸ Отсутствует строгое доказательство сферически-симметричного характера электромагнитного поля зряда, асимптотически приближающегося к черной дыре (оно имеется лишь для случая фиксированного в пространстве заряда);
- ❹ В литературе отсутствуют численные результаты вычисления характеристик электромагнитного излучения частицы, при учете влияния реакции электромагнитного излучения (уравнения движения получены в E. Poisson, 2004, 2011).

Покоящийся заряд вблизи черной дыры Шварцшильда

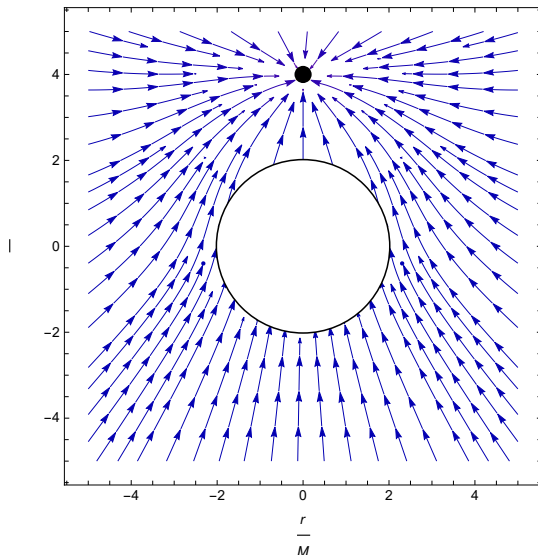


Рис.: Линии электрического поля для заряда на расстоянии $r_0 = 4M$ от черной дыры

Покоящийся заряд вблизи черной дыры Шварцшильда

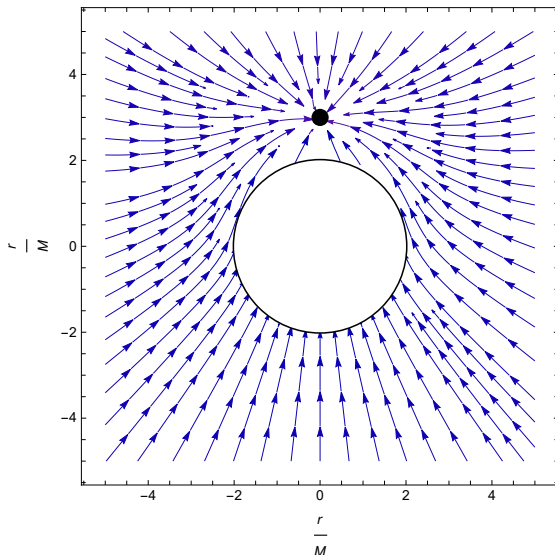


Рис.: Линии электрического поля для заряда на расстоянии $r_0 = 3M$ от черной дыры

Покоящийся заряд вблизи черной дыры Шварцшильда

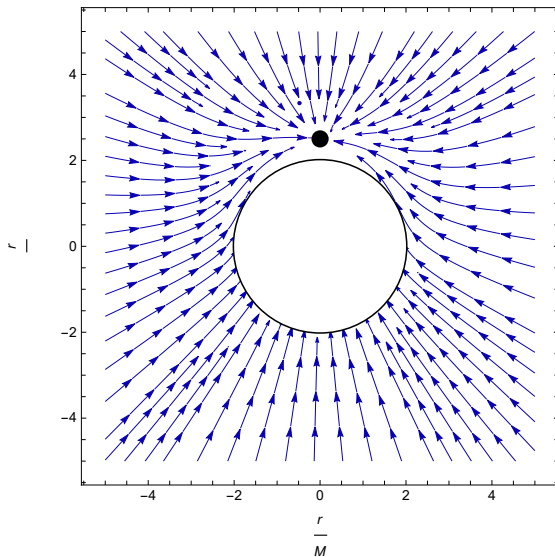


Рис.: Линии электрического поля для заряда на расстоянии $r_0 = 2,5M$ от черной дыры

Покоящийся заряд вблизи черной дыры Шварцшильда

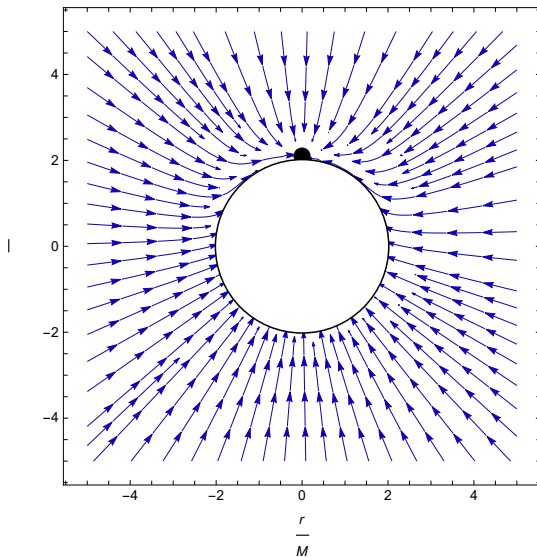


Рис.: Линии электрического поля для заряда на расстоянии $r_0 = 2,1M$ от черной дыры

Покоящийся заряд вблизи черной дыры Шварцшильда

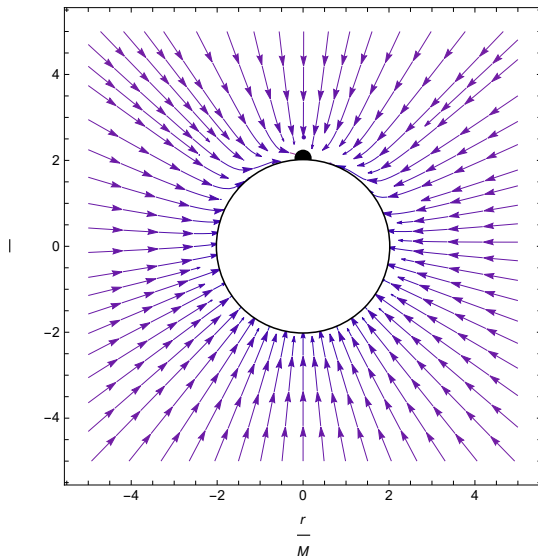


Рис.: Линии электрического поля для заряда на расстоянии $r_0 = 2,05M$ от черной дыры

Сферически-симметричным электрическое поле будет и в случае заряда, асимптотически падающего на черную дыру.

Komarov, S. O. Electromagnetic field of a charge asymptotically approaching a spherically symmetric black hole / Komarov, S. O., Gorbatsievich, A. K. and Vereshchagin, G. V. // Physical Review D. – 2023. – Vol. 108. – P. 104056 (8 pages).

Список цитируемой литературы



E. Copson, On electrostatics in a gravitational field., *Proc. R. Soc. A* **118**, 184 (1928).



B. Linet, Electrostatics and magnetostatics in the Schwarzschild metric, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 1081 (1976).



Richard Hanni and Remo Ruffini, Lines of force of a point charge near a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D* **8**, 3259 (1973).



D. K. Ross, Radiation from particles falling into black-holes, *Pab. Astron. Soc. Pacific* **83**, 633 (1971).



A. A. Shatskiy, I. D. Novikov, and L. N. Lipatova, Spectrum of relativistic radiation from electric charges and dipoles as they fall freely into a black hole, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **116**, 904 (2013).



Frank J. Zerilli, Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics, *Phys. Rev. D* **2**, 2141 (1970).



R. Ruffini, Electromagnetic field of a particle moving in a spherically symmetric black-hole background and j. tiomno, *Lettere al Nuovo Cimento* **3**, 211 (1971).



R. Ruffini, Fully relativistic treatment of the brehmstrahlung radiation from a charge falling in a strong gravitational field, *Phys. Lett.* **41B**, 334 (1972).



Andrey Shoom, Synchrotron radiation from a weakly magnetized Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D* **92**, p. 124066 (2015).



Arman Tursunov, Martin Kološ, Zdeněk Stuchlík, and Dmitri V. Gal'tsov, Radiation reaction of charged particles orbiting a magnetized Schwarzschild black hole, *The Astrophysical Journal* **861**, p. 16pp (2018).



Eric Poisson, Adam Pound, Ian Vega, The motion of point particles in curved spacetime, *Living Rev. Relativity* **14**, p. 190pp (2011).



C. H. McGruder, Field energies and principles of equivalence, *Nature (London)* **272**, 806 (1978).



Antoine Folacci and Mohamed Ould El Hadj. Electromagnetic radiation generated by a charged particle plunging into a Schwarzschild black hole: Multipolar waveforms and ringdowns, / Antoine Folacci and Mohamed Ould El Hadj // *Phys. Rev. D* . — July2018 . — 98. — (2). — S. 024021.

Тензор электромагнитного поля F_{ij} удовлетворяет общековариантным уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} F^{ls}_{;s} = 4\pi j^l, \\ F_{[ij,k]} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Следовательно,

$$F_{ij} = A_{j;i} - A_{i;j}. \quad (3)$$

4-вектор тока j^l для кольца имеет вид:

$$j^l(x^k) = q \frac{\delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)}{2\pi \sqrt{-g} u^4} u^l(x^0, \tilde{x}^\alpha(x^0)). \quad (4)$$

Гравитационное поле вращающейся черной дыры описывается метрикой:

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k = - \left(1 - \frac{2r}{\rho^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{4ar}{\rho^2} \sin^2 \theta c dt d\phi.$$

Здесь $\{t, r, \theta, \phi\}$ — координаты Бойера-Линдквиста. Используются обозначения (система единиц $c = MG = 1$):

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta; \\ \Delta &= r^2 - 2r + a^2; \\ \Sigma^2 &= (r^2 + a^2)\rho^2 + 2ra^2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Введем тетраду Ньюмена-Пенроуза l^j ; n^j ; m^j ; $\tilde{m}^j$:

$$l^j = \{(r^2 + a^2)/\Delta; 1; 0; a/\Delta\};$$

$$n^j = (1/2)\{(r^2 + a^2)/\rho^2; -(\Delta/\rho^2); 0; a/\rho^2\};$$

$$m^j = \{\imath a \sin \theta; 0; 1; \imath \sin \theta\}/(r + \imath a \cos \theta)\sqrt{2};$$

$$\tilde{m}^j = \{-\imath a \sin \theta; 0; 1; -\imath \sin \theta\}/((r - \imath a \cos \theta)\sqrt{2}).$$

Тогда полевые функции будут иметь вид:

$$\Phi_0 = F_{ij} l^i m^j;$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(F_{ij} l^i n^j - F_{ij} m^i \tilde{m}^j).$$

Получим для них уравнения:

$$\frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\Delta^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right] + 2\Phi_0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right) - \frac{\Phi_0}{\sin^2 \theta} = J(r, \theta), \quad (5)$$

$$(r - ia \cos \theta) \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + 2\Phi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} + \cot \theta \Phi_0 \right) + \frac{ia \sin \theta}{(r - ia \cos \theta) \sqrt{2}} \Phi_0 = \frac{1}{2} (r - ia \cos \theta) j_k l^k. \quad (6)$$

Здесь

$$J(r, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} (r - ia \cos \theta) j_k l^k + \frac{1}{\sqrt{2}} \left((r - ia \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + 2 \right) \frac{\Sigma}{(r - ia \cos \theta)} j_k m^k.$$

Уравнение (5) называется уравнением Тьюкольского.

Получим выражения для компонент поля:

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left[ia \sin \theta F_{14} - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} F_{24} + \frac{i}{\sin \theta} F_{13} + \frac{a}{\Delta} F_{32} \right. \\ \left. F_{12} \right].$$

В случае медленно вращающейся черной дыры, будем рассматривать уравнения с точностью до линейных по a слагаемых. В этом случае $a \sim F_{13} \sim F_{32} \sim F_{12}$, так как в случае решения для метрики Шварцшильда соответствующие компоненты равны 0.

$$\sqrt{2}\Phi_0 = -\frac{rF_{24}}{(r-2)(r+ia \cos \theta)} + ia \frac{\sin \theta}{r} F_{14} + \frac{i}{r \sin \theta} F_{13} + \frac{1}{r} F_{12}. \quad (7)$$

Пусть ток $j_k m^k = 0$. Так как действительная часть тока $J(r, \theta)$ не содержит слагаемых порядка $\sim a$, то $F_{12} = 0$, а F_{24} совпадает с решением для метрики Шварцшильда.

Аналогично:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}F_{14} + \frac{i}{r\sqrt{2}\sin\theta}F_{32} + \frac{ia\sin\theta}{r\sqrt{2}}F_{42}.$$

Но действительная часть уравнения (6) тоже не содержит членов порядка $\sim a$. Таким образом F_{14} совпадает с решением для метрики Шварцшильда. Следовательно, решение для компоненты A_4 совпадает с решением для сферически-симметричной черной дыры.

Для нахождения остальных компонент, рассмотрим мнимую часть уравнений (5), (6).

Решение представим в виде:

$$A_4(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos \theta).$$

Тогда

$$\text{Re}[\Phi_0] = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R_l(r)}{(r-2)\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{R}_l(r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta).$$

Из уравнения Тьюкольского в линейном приближении получим:

$$\frac{1}{r^2 - 2r} \frac{d}{dr} \left[(r^2 - 2r)^2 \frac{d\hat{R}_l}{dr} \right] - [l(l+1) - 2] \hat{R}_l = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2\sqrt{2}r} P_l(\cos \theta_0) \delta(r-r_0).$$

Найдем решения:

$$R_1^{in} = 1; \quad R_2^{in} = 1 - r;$$

$$R_3^{in} = 1 - \frac{5}{2}r + \frac{5}{4}r^2.$$

$$R_l^{out}(r) = R_l^{in}(r) \int \frac{dr'}{(r'^2 - 2r')^2 (R_l^{in}(r'))^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} A_4^{in} = & f(r) - A_1(r - 2) \cos \theta - \\ & A_2(1 - r)(r - 2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta / 2) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнения (6) для функции $f(r)$ получим уравнение:

$$[r^2 f'(r)]' = -\delta(r - r_0) \Rightarrow f(r) = -q/r_0, r < r_0; \quad f(r) = -q/r, r > r_0.$$

Линии электрического поля в системе ZAMO

Введем систему отсчета ZAMO, 4-скорость которой u^k удовлетворяет уравнению: $\xi_k u^k = 0$, где $\xi^k = \{0, 0, 0, 1\}$ — азимутальное векторное поле Киллинга. Тогда тетрада имеет вид:

$$\begin{aligned}h^i_{(1)} &= \left\{ \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}, 0, 0, 0 \right\}; \\h^i_{(2)} &= \left\{ 0, \frac{1}{\rho}, 0, 0 \right\}; \\h^i_{(3)} &= \left\{ 0, 0, \frac{\rho}{\Sigma \sin \theta}, 0 \right\}; \\h^i_{(4)} &= \left\{ 0, 0, \frac{2ar}{\Sigma \rho \sqrt{\Delta}}, \frac{\Sigma}{\rho \sqrt{\Delta}} \right\}.\end{aligned}$$

Компоненты электрического поля в ортонормированном базисе:

$$\begin{aligned}E_{\hat{r}} &= h^i_{(1)} h^j_{(4)} F_{ij}; \\E_{\hat{\theta}} &= h^i_{(2)} h^j_{(4)} F_{ij};\end{aligned}$$

Тогда линии электрического поля могут быть найдены из уравнения:

$$\frac{dr}{r d\theta} = \frac{E_{\hat{r}}}{E_{\hat{\theta}}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{F^{14}}{F^{24}} = \sqrt{\Delta} \frac{\Sigma^2 F_{14} + 2arF_{13}}{\Sigma^2 F_{24} + 2arF_{23}}.$$

Аналогично, для случая магнитного поля нужно рассмотреть мнимую часть решения уравнения Тьюкольского:

$$\text{Im}[\Phi_0] = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{RM_l(r)}{(r-2)\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{R} \hat{M}_l(r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta).$$

Из уравнения Тьюкольского в линейном приближении получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 - 2r} \frac{d}{dr} \left[(r^2 - 2r)^2 \frac{d\hat{R}_l}{dr} \right] - [l(l+1) - 2] \hat{R}_l = \\ -a \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2\sqrt{2}l(l+1)r^2} \sin \theta_0 \frac{d}{d\theta} P_l(\cos \theta_0) \delta(r - r_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты магнитного поля в ортонормированном базисе:

$$B_{\hat{r}} = h^i_{(1)} h^j_{(4)} e_{ijkl} F^{kl} ;$$

$$B_{\hat{\theta}} = h^i_{(2)} h^j_{(4)} e_{ijkl} F^{kl} ;$$

Тогда линии электрического поля могут быть найдены из уравнения:

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{B_{\hat{r}}}{B_{\hat{\theta}}} .$$

Линии электрического поля в системе ЗАМО

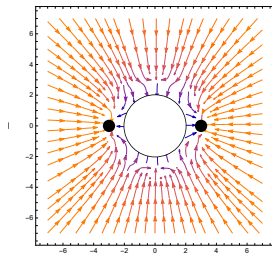


Рис.: $r_0 \stackrel{r}{=} 3M$

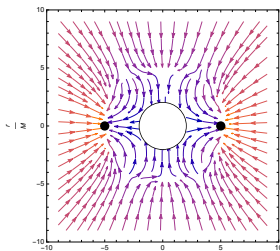


Рис.: $r_0 \stackrel{r}{=} 5M$

Линии электрического поля в системе ЗАМО

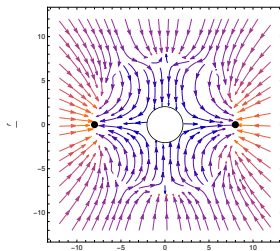


Рис.: $r_0 \stackrel{x}{=} 8M$

Спасибо за внимание!